Lineare Abbildungen eines Vektorraums auf einen Vektorraum

Teil 2:

Kern und Bild einer Abbildung (Matrix)

Datei Nr. 62102

Stand 4. August 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Inhalt

1 Definitionen von Kern und Bild einer Matrix bzw. Abbildung 3

2 Beispiele:

B1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Seite 4

B2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ Seite 5

B3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ Seite 6

B4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Seite 7

B5: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Seite 9

B6: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ Seite 11

B7: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ Seite 12

B8: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ Seite 13

B9: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Seite 14

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Definitionen

f sei eine lineare Abbildung eines Vektorraums V1 auf V_2: $f(x) = A \cdot \vec{x}$.

Der **Kern der Matrix A** (bzw. der Abbildung f) ist die Menge der Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \vec{x} \in V_1 \mid A \cdot \vec{x} = \vec{o} \right\}$$

Der Kern ist also die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
Der Nullvektor ist stets ein Vektor des Kerns. Man nennt ihn die triviale Lösung des Gleichungssystems. Wenn es außer dem Nullvektor keine anderen Lösungen gibt, sagt man auch: „A hat keinen Kern“.

Das **Bild der Matrix A** (bzw. der Abbildung f) ist die Menge aller Vektoren. die als Ergebnis der Multiplikation $A \cdot \vec{x}$ vorkommen.

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \vec{y} \mid \vec{y} = A \cdot \vec{x} \right\}$$

Es gibt eine **kombinierte Berechnung für Kern und Bild einer Matrix**.
Diese wird in einigen Beispielen gezeigt, vor allem auf Seite 16!

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Beispiele

Beispiel 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Determinante $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

Berechnung des Kerns:

Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 = 0 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Eliminationsverfahren: $(2) - 2 \cdot (1)$: $-2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

In (1): $x_1 = 0$.

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$

$\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{o}\}$, also ist dim(Ker(A)) = 0

Hinweis: Wenn die Determinante der Abbildungsmatrix A ungleich 0 ist, dann besteht der Kern von A nur aus dem Nullvektor.

Lösung mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{-2 \cdot Z1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0$$

Berechnung des Bildes:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{Bmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Da $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind (sie sind keine Vielfachen von einander), bilden sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Somit besteht das Bild aus allen Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

$\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$.

Man kann auch sagen: Das Bild besteht aus allen Linearkombinationen von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$.

Und das nennt man ihre lineare Hülle: $\mathrm{Bild}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$.

Das Bild hat also die Dimension 2.

Man beachte: dim(Ker(A)) + dim(Bild(A)) = 0 + 2 = 2 = dim $\mathbb{R}^2$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ hat die Determinante $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$!!

Berechnung des Kerns:

Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 = 0 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Da Gleichung (2) das Doppelte von (1) ist, ist sie ohne Bedeutung.

Zur Lösung von Gleichung (1) hat man eine freie Wahl:

Wähle $x_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -3r$

Lösungsvektoren: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Kern besteht also aus allen Vielfachen von $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist also seine lineare Hülle:

$\mathrm{Ker}(A) = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$, also ist dim(Ker(A)) = 1

Lösung mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{-2 \cdot Z1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_2 = r \text{ und } x_1 = -3r$$

Berechnung des Bildes:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{Bmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (x_1 + 3x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit besteht das Bild aus allen Vielfachen von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\mathrm{Bild}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$.

Das Bild hat also die Dimension 1.

Man beachte: dim(Ker(A)) + dim(Bild(A)) = 1 + 1 = 2 = dim $\mathbb{R}^2$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ hat die Determinante Null!

Nach Sarrus: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{array}\right| = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

Berechnung des Kerns:

Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{-3 \cdot Z1}{\overset{-2 \cdot Z1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \underset{-2 \cdot Z2}{:(-3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-4 \cdot Z2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Wähle $x_3 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = r$ und $x_2 = -2r$

Lösungsvektoren: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Kern besteht also aus allen Vielfachen von $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist also seine lineare Hülle:

$\mathrm{Ker}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, also ist dim(Ker(A)) = 1

Berechnung des Bildes:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{Bmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Weil der Kern die Dimension 1 hat, kann das Bild nur die Dimension 3-1 = 2 haben.

Also stellt man $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ dar: $\vec{b}_3 = 2 \cdot \vec{b}_2 - \vec{b}_1$.

Damit folgt: $y = x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + x_3 \cdot \left(2\vec{b}_2 - \vec{b}_1\right) = \left(x_1 - x_3\right) \cdot \vec{b}_1 + \left(x_2 + 2\vec{b}_3\right) \cdot \vec{b}_2$.

Somit besteht das Bild aus allen Linearkombinationen von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$:

$\mathrm{Bild}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right]$. Das Bild hat also die Dimension 2.

Man beachte: dim(Ker(A)) + dim(Bild(A)) = 1 + 2 = 3 = dim $\mathbb{R}^3$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Determinante mit Entwicklung nach der 4. Spalte:

$$\det(A) = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\det_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 - 1 = 1$$

$$\det_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2$$

$\det(A) = -2 \cdot 1 - (-2) = 0$ *Jetzt kann man bereits vorhersagen:* $\text{Bild}(A) \neq \mathbb{R}^3$

1. Lösung: Getrennte Berechnung von Bild und Kern

Berechnung des Kerns:

Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z1 \\ +Z2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-3) \\ 3 \cdot Z4 - Z3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dem entspricht das Gleichungssystem: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 & (1) \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 & (2) \\ x_3 + x_4 = 0 & (3) \end{cases}$

Wähle $x_4 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_3 = -r$

In (2): $x_2 = 2x_3 + x_4 = -2r + r = -r$

In (1): $x_1 = -x_2 - 2x_4 = r - 2r = -r$

Kernvektoren: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ -r \\ r \end{pmatrix} = -r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Der Kern von A besteht somit aus allen Vielfachen von $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\text{Ker}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

Der Kern hat die Dimension 1.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Berechnung des Bildes:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_4 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_1 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weil der Kern die Dimension 1 hat, kann das Bild nur die Dimension 4 - 1 = 3 haben.

Dazu zeigt man z. B. dass die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Nach Gauß (siehe oben) erkennt man die Stufenform der Matrix, was auf die lineare Unabhängigkeit hinweist. Außerdem kann man erkennen, dass $\vec{b}_4 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$ ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{+Z2}{\overset{-Z1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{+Z2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{3 \cdot Z4 - Z3}{\overset{:(-3)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Das Bild hat also die Dimension 3

Man beachte: dim(Ker(A)) + dim(Bild(A)) = 1 + 3 = 4 = dim $\mathbb{R}^4$

2. Lösungsmethode: Bild – Kern – Algorithmus (mit Spalten-Operationen)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow E_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} Sp2 - Sp1 \\ Sp4 - 2 \cdot Sp1 \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} Sp3 + 2 \cdot Sp2 \\ Sp4 + Sp2 \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sp4 - Sp3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgerung: $\text{Bild}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ $\qquad \text{Ker}(A) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

Anm: Die Basisvektoren dieser linearen Hüllen unterscheiden sich von denen der ersten Methode, doch die sind ja stets auswechselbar.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Usw. auf der CD

Demo-Text für www.mathe-cd.de